

# 空間向量

..... 1-1

## 空間概念

空間中的立體性質  
空間中的立體圖形  
三視圖  
長方體表面兩點距離(B版)

..... 1-2

## 空間向量的坐標表示法

空間坐標系  
空間中的向量(A版)  
球面距離(B版)

..... 1-3

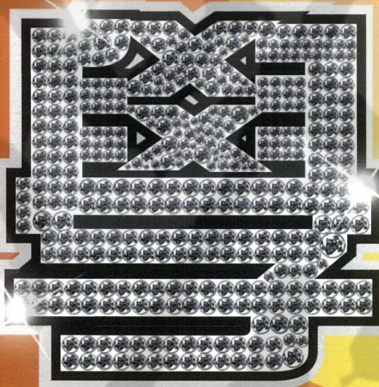
## 空間向量的內積(A版)

空間向量的內積  
空間向量的應用

..... 1-4

## 外積、體積與行列式(A版)

行列式  
外積  
面積與體積



# 第1章

## 空間向量

林岳數學 

1-1 空間概念

### 首部曲 空間中的立體性質

1. 直線與平面
2. 三垂線定理
3. 二面角及其應用

### 貳部曲 空間中的立體圖形

1. 正方體與長方體
2. 正四面體與三角錐體
3. 正四角錐體

### 參部曲 三視圖

### 肆部曲 長方體表面兩點距離(B版)

1. 長方體表面兩點距離
2. 地球的經度與緯度



講道理

道理說清楚，就是好的開始

三度空間中的基本圖形就是點、線與平面，由這一章開始，我們要將視野由平面擴展到立體，就應先搞定這些基本圖形之間的關係，請！



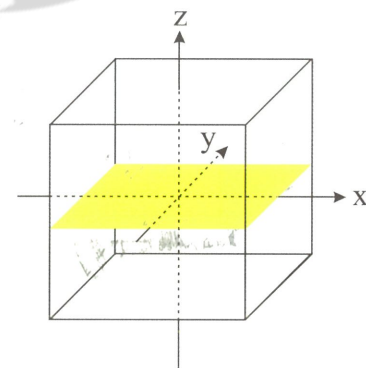
空間

(1) 二維空間(平面)

在幾何學中，以  $x$  軸、 $y$  軸(水平線、鉛直線)無限延展而成的平面，稱為二維空間。如下圖，黃色平面即為二維空間的一個代表。

(2) 三維空間(立體空間)

在二維空間中，多了一個上下延伸的維度(幾何學中的  $z$  軸)，所形成的空間稱為三維空間。如下圖，由二維平面上下延展所形成的立體圖形即為三維空間的一個代表。



立航心得語

我們所生活的空間，除了立體空間之外，還有一個時間的維度故為四度空間。



點線面之間的關係

- (1) 相異兩點可決定唯一直線
- (2) 不共線三點可決定唯一平面
- (3) 一平面中相異兩點所決定的直線落在此平面上



空間中恰決定一平面的條件

- (1) 不共線三點可決定唯一平面
- (2) 一線及線外一點可決定唯一平面
- (3) 兩相交直線可決定唯一平面
- (4) 兩平行直線可決定唯一平面

- (1) 不共線三點
- (2) 一線及線外一點
- (3) 兩相交直線
- (4) 兩平行直線



立刻啟航 ~ 3 ~ 航向美好

首部曲

空間中的立體性質

1. 直線與平面

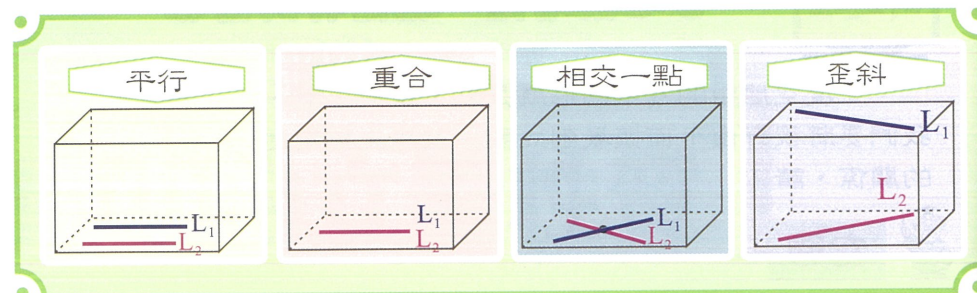
2. 三垂線定理

3. 二面角及其應用



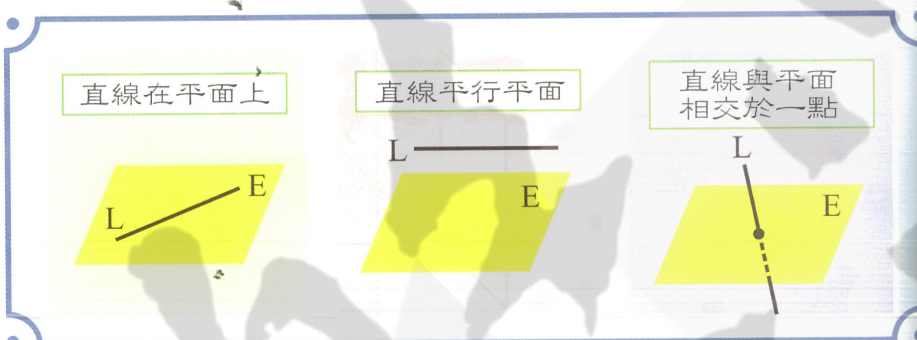
### 空間中兩直線的關係

兩直線共平面：(1)平行 (2)重合 (3)相交一點  
 兩直線不共平面：歪斜線(不平行且不相交的兩直線)



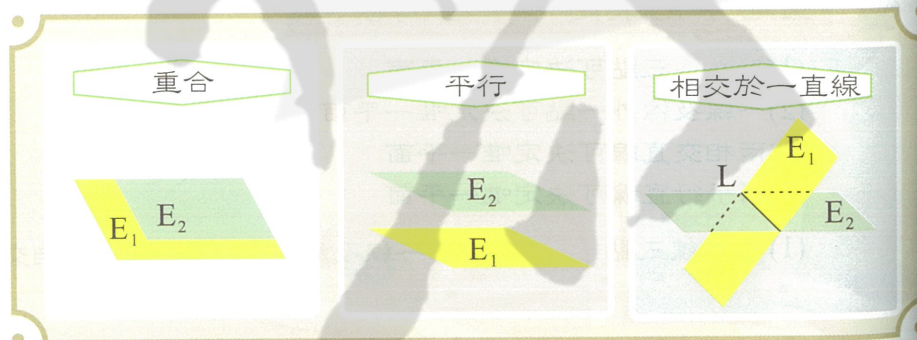
### 空間中直線與平面之間的關係

(1)直線在平面上  $\Leftrightarrow$  直線與平面有無限多個交點  
 (2)直線平行平面  $\Leftrightarrow$  直線與平面沒有交點  
 (3)直線與平面相交於一點



### 空間中兩平面之間的關係

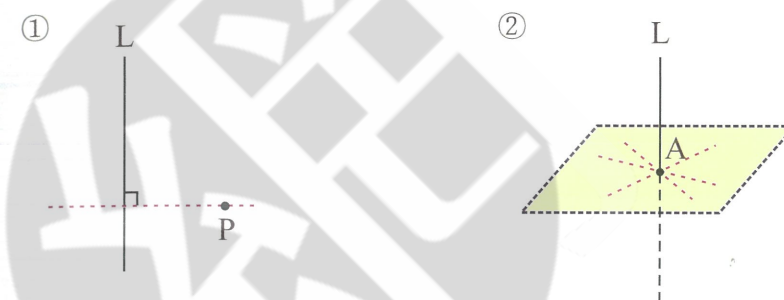
(1)兩平面重合  $\Leftrightarrow$  兩平面為一個相同平面  
 (2)兩平面平行  $\Leftrightarrow$  兩平面沒有交點  
 (3)兩平面相交於一直線



### 空間中的垂直

① 給定一直線  $L$  及線外一點  $P$ ，恰有一直線通過  $P$  點且垂直於  $L$   
 ② 給定一直線  $L$  及線上一點  $A$ ，有無限多條直線通過  $A$  點且與直線  $L$  垂直，而且這些垂直線構成一個平面

$\Leftrightarrow$  這就是 **直線與平面垂直的定義**



### 直線與平面的垂直

#### ① 性質

已知直線  $L$  與平面  $E$  垂直於  $A$  點，則  
 直線  $L$  與平面上所有過  $A$  點的直線都垂直

#### ② 判斷

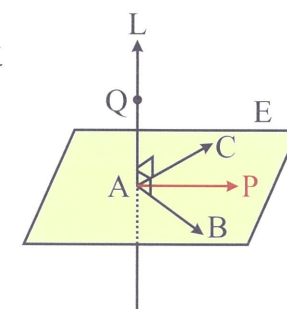
已知直線  $L$  與平面  $E$  相交於  $A$  點  
 只要在平面  $E$  上找到二條過  $A$  點的相異直線與  $L$  垂直，  
 就可以判定直線  $L$  與平面  $E$  垂直

【證明】▶ (1) 如圖所示，直線  $L$  與平面  $E$  相交於  $A$  點，  
 $L$  上有異於  $A$  的一點  $Q$ ，

而且在平面上有二條直線  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  都與直線  $L$  垂直  
 即  $\overline{AB} \perp \overline{AQ}$ ， $\overline{AC} \perp \overline{AQ}$

(2) 假設  $P$  點為平面  $E$  上的任意一點，  
 則  $\overline{AP} = \alpha \overline{AB} + \beta \overline{AC}$ ，其中  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$   
 且  $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = (\alpha \overline{AB} + \beta \overline{AC}) \cdot \overline{AQ}$   
 $= \alpha \overline{AB} \cdot \overline{AQ} + \beta \overline{AC} \cdot \overline{AQ} = 0$   
 $\therefore \overline{AP} \perp \overline{AQ}$

表示平面上所有過  $A$  點的直線都與直線  $L$  垂直，  
 故  $L \perp E$



【文一北】

講道理

道理說清楚，就是好的開始

分析立體圖形最關鍵的事就是先確認圖形中的平行與垂直之關係。這兒要介紹一個超級好用的定理—三垂線定理，請！

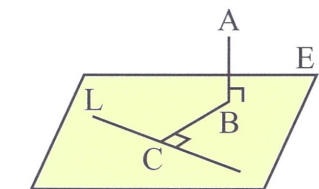
三垂線定理

設直線 AB 與平面 E 垂直於 B 點，在平面 E 上，直線 BC 與直線 L 垂直於 C 點，則直線 AC 也與直線 L 垂直於 C 點

**記憶** ⇨ 就利用 **三垂線定理的圖形** 幫助記憶

**證明** ⇨ 1° 在直線 L 上任取二點 P、Q，使得 C 是 PQ 的中點  
於是，在平面 E 上， $\overline{BC}$  是  $\overline{PQ}$  的垂直平分線  
2° 在  $\triangle ABP$  與  $\triangle ABQ$  中， $\overline{BP} = \overline{BQ}$ ， $\overline{AB} = \overline{AB}$ ， $\angle ABP = \angle ABQ = 90^\circ$ ，故  $\triangle ABP \cong \triangle ABQ$  (SAS 全等)  
3° 在  $\triangle APQ$  中， $\overline{AP} = \overline{AQ}$ ， $\overline{CP} = \overline{CQ}$ ，  
所以  $\overline{AC}$  是等腰  $\triangle APQ$  在底邊上的中線  
於是， $\overline{AC} \perp \overline{PQ}$ ，亦即直線 AC 與直線 L 垂直

立航心得語



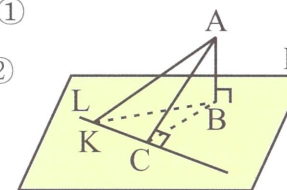
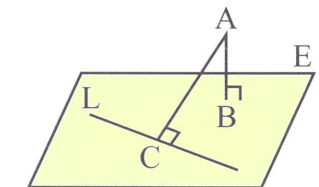
三垂線逆定理

設直線 AB 與平面 E 垂直於 B 點，且直線 AC 與平面 E 上的直線 L 垂直於 C 點，則在平面 E 上，直線 BC 也與直線 L 垂直於 C 點

**記憶** ⇨ 就利用 **三垂線逆定理的圖形** 幫助記憶

**證明** ⇨ 在 L 上取一點 K，且連接  $\overline{AK}$  與  $\overline{BK}$   
在  $\triangle ACK$  中， $\overline{AK}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{KC}^2 \dots \textcircled{1}$   
在  $\triangle ABC$  中， $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \dots \textcircled{2}$   
由  $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ ： $\overline{AK}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{KC}^2$   
 $\therefore \overline{BC}^2 + \overline{KC}^2 = \overline{AK}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{BK}^2$   
可得  $\angle BCK = 90^\circ$ ，故  $\overline{BC} \perp \overline{KC}$  得證

立航心得語



三垂線定理的要訣

通常在題目中看到                      的條件，就應想到可能要使用“三垂線定理”

1. 下列哪些敘述是正確的？
- (A) 在平面上，若兩相異直線不相交，則它們必平行
  - (B) 在空間中，若兩相異直線不相交，則它們必平行
  - (C) 在平面上，任意兩相異直線一定有公垂線(仍在該平面上)
  - (D) 在空間中，任意兩相異直線一定有公垂線
  - (E) 在空間中，若一直線 L 垂直平面 E，則平面 E 上任一條直線皆會與 L 垂直

【答案】▶ (A)(D)

【解析】▶

2. 在空間中，下列何者為真？
- (1) 相異三點恰決定一平面
  - (2) 平面  $E_1$  與平面  $E_2$  平行，直線  $L_1$  在  $E_1$  上，直線  $L_2$  在  $E_2$  上，則  $L_1 \parallel L_2$ 。
  - (3) 任意相異二直線必有公垂線
  - (4) 一線段之垂直平分線恰一條
  - (5) 二歪斜線在平面上的正射影為相交二直線

【建中】

【答案】▶ (3)

【解析】▶



在空間中，下列敘述何者正確？

- (A) 過直線外一點，恰有一直線垂直此直線
  - (B) 過直線外一點，恰有一直線平行此直線
  - (C) 過平面外一點，恰有一直線垂直此平面
  - (D) 過平面外一點，恰有一直線平行此平面
  - (E) 過直線上一點，恰有一直線垂直此直線
- ⇨ (A)(B)(C)

【雄中】【北一女】

講道理

道理說清楚，就是好的開始

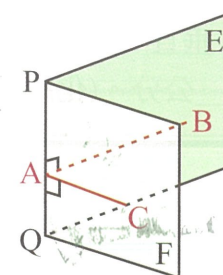
空間中的平行與垂直的性質大致上與心中已認知的平面上的性質相似。但是「平面與平面的夾角」卻有另一番特殊的規定，且有多種應用，請！



平面與平面的夾角

① **平行** ⇨ 二個平面 E 與 F 不相交(沒有交點)，我們就稱二個平面平行，記作  $E // F$

② **夾角** ⇨ 二個平面 E 與 F 交於一直線 L，在平面 E 與平面 F 上，分別找到直線  $\overrightarrow{AB}$  與直線  $\overrightarrow{AC}$  同時垂直直線 L 於 A 點，則定義(如圖所示)  
平面 E 與 F 的夾角就是  $\overrightarrow{AB}$  與  $\overrightarrow{AC}$  的夾角

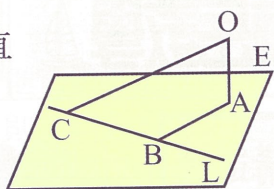


③ **想法** ⇨ 請想想，為什麼平面與平面的夾角需要這樣的規定

⇨

另外，請別忘了，二面角題型常搭配  解題

3. 如右圖所示： $\overline{OA} \perp$  平面 E， $\overline{AB}$  垂直直線 L，已知  $\overline{OA}=3$ ， $\overline{AB}=4$ ， $\overline{BC}=12$ ，則  $\overline{OC} =$  \_\_\_\_\_。



【答案】▶ 13

【解析】▶

4. 三射線  $\overline{OX}$ ， $\overline{OY}$ ， $\overline{OZ}$  互成  $30^\circ$  角，P 為  $\overline{OX}$  上之一點， $\overline{OP}=1$ ，由點 P 到平面 YOZ 的垂直距離為 PQ(Q 為垂足)，由點 Q 至  $\overline{OY}$  的垂直距離為 QR(R 為垂足)， $\overline{QR}$  交  $\overline{OZ}$  於 S，則

- (A)  $\overline{OR} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\overline{OR} = 1$  (C)  $\overline{RS} = \frac{1}{2}$  (D)  $\overline{RS} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】▶ (A)(C)

【解析】▶



1. 如圖，已知空間中一直線 L 通過 A、B 兩點，O 為 L 外一點，取線段  $\overline{OC}$  垂直平面 OAB 於 O 點，若  $\overline{OA} = \overline{OB} = 10$ ， $\overline{AB} = 12$ ，且點 C 到直線 L 的最短距離為 12，求  $\overline{OC}$  長 \_\_\_\_\_。



【南二中】

2. 三射線  $\overline{OX}$ ， $\overline{OY}$ ， $\overline{OZ}$  互成  $60^\circ$ ，在  $\overline{OX}$  上取一點 P 使  $\overline{OP} = 2$  且 P 在平面 YOZ 之投影點為 Q，又  $\overline{QR} \perp \overline{OY}$  於 R，交  $\overline{OZ}$  於 S，則  $\overline{OR} =$  \_\_\_\_\_， $\overline{RS} =$  \_\_\_\_\_。  
⇨  $\overline{OR} = 1$ ， $\overline{RS} = \sqrt{3}$

5. 如圖，ABCD 為四面體，已知  $\overline{AD}$  垂直於平面 BCD， $\overline{BC} \perp \overline{BD}$ ， $\overline{BC} = 7$ ， $\overline{AB} = 24$ ， $\overline{AD} = 15$ ，則  $\overline{AC}$  之長為 \_\_\_\_\_；若平面 ADB 與平面 ADC 的夾角為  $\theta$ ，則  $\sin \theta =$  \_\_\_\_\_。

【答案】▶  $\overline{AC} = 25$ ， $\sin \theta = \frac{7}{20}$

【解析】▶

立航心得小語

